IOAA-Austria

Hausaufgabenrunde 2024

Vorwort

Im Folgenden finden Sie 6 Aufgaben aus verschiedenen Teilbereichen der Astronomie und Astrophysik. Sie können die Aufgaben bis zum 1. April 2024 (23:59 Uhr) per Mail unter astro-olympiad@outlook.com einreichen. Die Lösungen dürfen handschriftlich oder am Computer erstellt werden und sollen als PDF-Datei im Format *vorname-nachname.pdf* abgegeben werden. Erwähnen Sie außerdem Ihren Vornamen, Nachnamen sowie Ihre Schule und Klassenstufe bei der Abgabe.

Beachten Sie, dass Sie Teilaufgaben auch bearbeiten können, wenn Sie die vorhergehenden Teile nicht bearbeitet haben. Es dürfen alle Hilfsmittel zu Rat gezogen werden, das beinhaltet Bücher, das Internet oder Programme wie Stellarium. Allerdings muss deren Verwendung, sofern es über Standardwissen hinausgeht, in der Lösung gekennzeichnet werden. Alle Aufgaben sind aber ohne externe Hilfe lösbar. Die Aufgaben sind allein zu bearbeiten.

Viel Spaß!

1 Das Kreuz des Nordens (1.5P)

Schneiden Sie die Strecke zwischen Altair und Vega mit einer aus zwei benachbarten Sternen in Cassiopeia kommenden Geraden und schon landen Sie bei einem Doppelstern. Um welchen handelt es sich? (1.5P)

2 Mondbeobachtung (3P)

Ein Astronom beobachtet mit einem Keplerteleskop den Mond. Das Teleskop hat eine Öffnung vom Durchmesser $D = 8$ cm und eine Objektivbrennweite $f = 100$ cm. Am Beobachtungstag beträgt die Entfernung des Mondes von der Erde $r = 384000$ km. Nehmen Sie an, dass das vom Mond abgestrahlte Licht monochromatisch von der Wellenlänge $\lambda = 500$ nm ist.

(a) Ermitteln Sie den kleinstmöglichen Durchmesser l eines Kraters auf der Mondoberfläche, der mit dem Teleskop aufgelöst werden kann. (1.5P)

(b) Berechnen Sie die Bildgröße des Kraters in der Brennebene des Teleskops. (1.5P)

3 Lebensdauer (6P)

Sie haben in einem Hertzsprung Russell-Diagramm zwei Hauptreihensterne gefunden, die Sie besonders interessieren. Bei einem scheint es sich um einen sonnenähnlichen Stern (mit Masse $M_1 = M_\odot$) zu handeln, er hat eine scheinbare Helligkeit von $V_1 = 21.4$. Der zweite Stern hat eine Helligkeit von $V_2 = 19.3$. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass beide Sterne zur gleichen Zeit geboren wurden und sich im gleichen Abstand zum Beobachter befinden. Nehmen sie außerdem die Beziehung

$L \propto M^{3.5}$ zwischen der Leuchtkraft und Masse der Sterne an. Die absolute Helligkeit der Sonne beträgt $\mu_\odot = 4.83$.

(a) Berechnen sie den Abstand der beiden Sterne vom Beobachter. (1P)

(b) Ermitteln sie die Masse des zweiten Sterns in Sonnenmassen. (2.5P)

(c) Um wie viel kürzer lebt der zweite Stern im Gegensatz zum ersten. Berechnen Sie T_2/T_1, wobei T_2 und T_1 die Lebzeiten der beiden Sterne bezeichnen. (2.5P)

4 Heißer Jupiter (6P)

Betrachten Sie den Exoplaneten 51 Pegasi b, der im Abstand a seinen Wirtsstern umkreist. Der Stern hat eine Temperatur von T_S, einen Radius von R_S und kann als idealer Schwarzkörper angenommen werden. Der Exoplanet mit der Masse M_P und dem Radiums R_P hat hingegen einen Absorptionskoeffizienten α. Ihre Aufgabe ist es, die thermischen Eigenschaften des Planeten, die Auswirkungen der gebundenen Rotation auf seine Temperaturverteilung und die Bedingungen für die Erhaltung seiner Atmosphäre zu untersuchen.

(a) Leiten Sie die Gleichungen für die absorbierte und emittierte Leuchtkraft von 51 Pegasi b ab, unter der Annahme, dass er sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Berechnen Sie die Oberflächentemperatur von 51 Pegasi b basierend auf dem Gleichgewicht zwischen absorbierter und emittierter Strahlung. (1.5P)

(b) Unter der Annahme, dass eine Hemisphäre immer dem Stern zugewandt ist (gebundene Rotation), modifizieren Sie die zuvor abgeleiteten Gleichungen, um die neue Oberflächentemperatur des Planeten zu berechnen. Erläutern Sie die Implikationen für die Temperatur der dem Stern abgewandten Hemisphäre. (1P)

(c) Analysieren Sie die Bedingungen, unter denen die Atmosphäre von 51 Pegasi b ihre Gase behalten kann. Verwenden Sie das Konzept der thermischen RMS-Geschwindigkeit und der Fluchtgeschwindigkeit, um das minimale Molekulargewicht m von Gasen abzuleiten, die vom Planeten zurückgehalten werden können. (2.5P)

(d) Bestimmen Sie auf Basis der abgeleiteten Kriterien für die atmosphärische Retention, welche der häufigen Gase (Wasserstoff (1 g/mol), Kohlendioxid (44 g/mol), Wasserdampf (18 g/mol)) in der Atmosphäre von 51 Pegasi b erwartet werden können, ohne in den Weltraum zu entweichen. (1P)

5 Schattenbilder (9P)

Ein Fotograf befindet sich im Frühling an einem unbekannten Ort auf der Erde. Er platziert seine Kamera direkt über einem vertikalen Stab mit der Länge $H = 1m$, sodass diese den Stab und seine Umgebung erfasst. Sobald die Sonne im Süden seinen Himmelsmeridian durchquert, machte der Fotograf ein Bild des Stabs und seines Schattens. Anschließend machte er drei weitere Schnappschüsse im Abstand von 6 Stunden. Durch Überlagerung aller vier Fotos erhält er das in Abbildung 1 gezeigte Bild. Die Länge des kürzesten und des längsten Schattens misst er als $d_1 = 2$ m bzw. $d_3 = 5$ m.

Nehmen Sie im Folgenden an, dass das tropische Jahr $T_E = 365,24$ d beträgt, dass das Frühlingsäquinoktium auf Mitternacht (d.h. 0:00 Uhr) am 20. März fällt, dass sich die Deklination der Sonne in einem Zeitraum von einem Tag nicht ändert und dass die Achsneigung der Erde $\varepsilon = 23,44°$ beträgt. Vernachlässigen Sie außerdem atmosphärische sowie durch die Kameralinse verursachte Effekte.

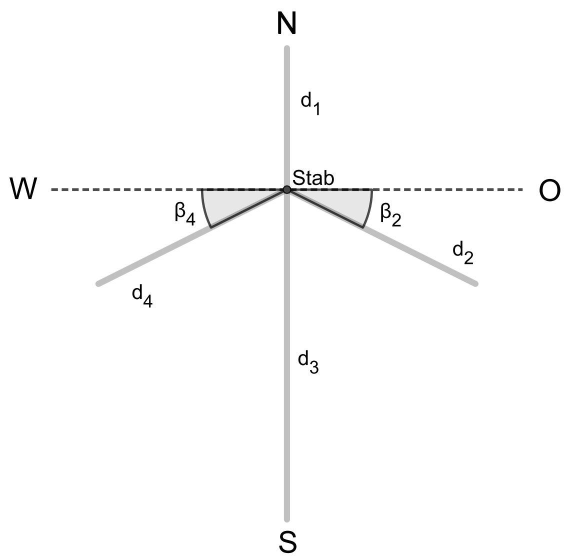

Abbildung 1: Darstellung der Überlagerten Bilder des Fotografs (nicht maßstabsgeträu).

(a) Ermitteln Sie die Winkelhöhen h_1 und h_3 der Sonne über dem lokalen Horizont zu dem Zeitpunkt, als der Schatten am längsten bzw. am kürzesten war. (1P)

(b) Bestimmen Sie die Deklination $\delta_\odot$ der Sonne und die geographische Breite ϕ des Fotografs. (2.5P)

(c) Bestimmen Sie die Längen d_2 und d_4 und Winkel β_2 und β_4 der beiden verbleibenden Schatten. (4P)

(d) Bestimmen Sie den Kalendertag, an dem die Fotos aufgenommen wurden. (1.5P)

6 Dreikörperproblem (12P)

Betrachten Sie ein gravitativ gebundenes System, das sich aus einem zentralen Sternenpaar (Sterne 1 & 2) sowie einem weit entfernten Stern (3) zusammensetzt. Die zentralen Sterne 1 & 2 haben jeweils die gleiche Masse M und umlaufen einander auf Kreisbahnen. Sie haben den Abstand a voneinander. Der Stern 3 befindet sich auf einer Kreisbahn um 1 & 2 und hat den Abstand $\rho \gg a$ zu deren Baryzentrum. Außerdem ist seine Masse $\mu \ll M$, sodass im folgenden gravitative Effekte von 3 auf 1 & 2 vernachlässigt werden können. Die Bahnen der drei Sterne sind koplanar. Der Winkel zwischen 1, dem Baryzentrum von 1 & 2 und 3 sei θ (s. Abb. 2).

Im folgenden werden Sie die Näherung

$$(1+\epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\epsilon^2 \tag{1}$$

für $|\epsilon| \ll 1$ und $n \in \mathbb{Z}$ brauchen.

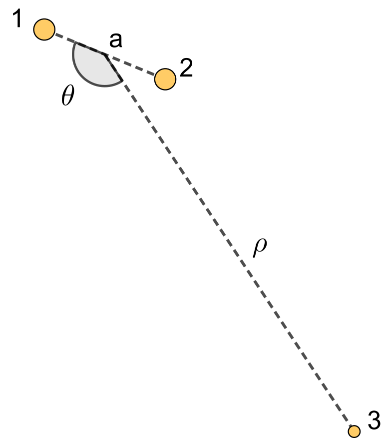

Abbildung 2: Die drei Sterne des Sternsystems.

(a) Ermitteln sie die Umlaufdauer $T_{1,2}$ der Kreisbahn von 1 & 2 im zentralen Sternenpaar. (1P)

(b) Benutzen Sie Gleichung 1, um zu zeigen, dass die Abstände L_1 und L_2 von 3 zu 1 bzw. 2 zur Näherung in zweiter Ordnung a/ρ der Gleichung

$$L_{1,2} \approx \rho\left(1 \mp \frac{a}{2\rho}\cos\theta + \frac{a^2}{8\rho^2}\sin^2\theta\right) \tag{2}$$

genügen. (3P)

(c) Benutzen Sie Gleichung 2 und 1, um zu zeigen, dass zur Näherung in zweiter Ordnung der Betrag der kombinierten Gravitationskraft der Sterne 1 & 2 auf Stern 3

$$F \approx \frac{2GM\mu}{\rho^2}\left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\left(\alpha + \beta\cos\left(2\theta\right)\right)\right) \tag{3}$$

beträgt und finden Sie die Konstanten α und β. Sie können hierbei annehmen, dass zu genügend guter Näherung die Gravitationskraft von 1 & 2 auf 3 entlang der Verbindungslinie von 3 zum Baryzentrum wirkt. *Hinweis:* $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$ und $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$. (5P)

(d) Da die Umlaufdauer $T_{1,2}$ von 1 & 2 viel kürzer ist als die Umlaufdauer T_3 von 3 verschwindet der Term $\beta \cos(2\theta)$ über eine Periode T_3. Es gilt also $|\langle \cos(2\theta) \rangle_{T3}| \ll 1$.

Finden Sie nun anhand Gleichung 3 und 1, die Umlaufperiode T_3 von 3 um 1 & 2, wieder zur Näherung in zweiter Ordnung, als Funktion von G, M, a, ρ und α.

Um wie viel weicht diese Periode von der Periode T_0 eines Systems ab, in der 3 im Abstand ρ um einen einzelnen Stern mit der Masse $2M$ kreist. Berechnen Sie hierfür $\frac{T_0 - T_3}{T_0}$. (2.5P)

(e) Im Alpha Centauri System kreisen die beiden Sterne A und B im mittleren Abstand von 23 AU voneinander. Der Stern Proxima Centauri kreist im Abstand von 13000 AU um A und B. Schätzen Sie anhand ihres Ergebnisses aus (d) ab, um welchen Faktor $\left(\frac{T_0 - T_3}{T_0}\right)$ sich die Umlaufdauer von Proxima dadurch ändert, dass er ein Doppelsternsystem umläuft. (0.5P)