

## IOAA-Austria

**Finale 2024****1 Kometen (2P)**

Ein Komet hat eine Umlaufperiode von 300 Jahren um die Sonne. Im Perihel ist der Komet 0,05 AU von der Sonne entfernt. Wie weit ist er im Aphel entfernt? (2P)

**2 Ein unbekanntes Objekt (3P)**

Finden Sie die siderische Umlaufzeit  $T_{sid}$  (in Tagen) und die große Halbachse  $a$  (in AU) eines Objektes, das die Sonne in der Ebene der Ekliptik umläuft und alle 290 Tage in Opposition ist. (3P)

**3 Rückkehr der Proben (4P)**

Finden Sie die Geschwindigkeit  $v$  des Wiedereintritts einer Raumsonde in die Erdatmosphäre, die mit Proben vom Jupiter zurückkehrt. Die Sonde wurde durch einen prograden Hohmann-Transfer vom Jupitermond Europa aus zur Erde geschickt. Nehmen Sie an, dass sich Jupiter und die Erde auf kreisförmigen Umlaufbahnen befinden und dass Jupiter eine Umlaufperiode von 12 Jahren hat. (4P)

**4 Sonnenuntergang (10P)**

Ein Astronom entscheidet sich zum Frühlingsäquinoktium (Tagundnachtgleiche) die Laufbahn der Sonne aufzunehmen. Er platziert einen Laserpointer horizontal in einer Entfernung von 1 m vom Mittelpunkt der unteren Kante seines 3 m breiten und 1,5 m hohen, nach Südwesten ausgerichteten Fensters. Er fängt seine Beobachtung zu Mittag an und beendet sie zum Sonnenuntergang, indem er alle 1,5 Stunden den Laserpointer durch sein Fenster auf die Sonne richtet und auf die entsprechende Stelle einen Punkt zeichnet. Er misst die x- und y-Positionen der Punkte ausgehend von der unteren linken Ecke des Fensters. Vernachlässigen Sie atmosphärische Effekte. Die Positionen und Zeiten sind in der untenstehenden Tabelle angegeben:

x [cm]	y[cm]	Wahre Ortszeit
50.1	65.3	12:00
111.9	45.1	13:30
154.1	30.4	15:00
194.0	18.2	16:30
250.9	0.3	18:00

Tabelle 1: Die Aufnahmen des Astronomen

- (a) Finden Sie eine Formel, um aus den x- und y-Daten, die Höhe  $a$  der Sonne über dem Horizont zu berechnen. Finden Sie die Höhe für alle Aufnahmen des Astronomen. (2P)

- (b) Berechnen Sie die zu jeder Uhrzeit korrespondierenden Stundenwinkel der Sonne in Grad. (1P)
- (c) Finden Sie eine Formel für die Höhe  $a$  in Abhängigkeit des Stundenwinkels  $HA$  und des Breitengrads  $\Phi$  des Astronomen (1P).
- (d) Tragen Sie die Höhe  $a$  in bestimmter Weise gegen den Stundenwinkel  $HA$  auf, sodass Sie durch einen linearen Fit den Breitengrad  $\Phi$  des Astronomen bestimmen können. Geben Sie den Breitengrad  $\Phi$  in Grad an und schätzen Sie den assoziierten Fehler  $\Delta\Phi$  ab. (6P)

## 5 Cepheidenpulsation (8P)

Der Stern  $\beta$ -Doradus ist ein Cepheiden-Veränderlicher mit einer Pulsationsperiode von 9,84 Tagen. Wir machen die vereinfachende Annahme, dass der Stern am hellsten ist, wenn er am stärksten kontrahiert ist (Radius  $R_1$ ) und am dunkelsten, wenn er am stärksten expandiert ist (Radius  $R_2$ ). Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Stern seine kugelförmige Gestalt beibehält und sich in jedem Augenblick während des gesamten Zyklus wie ein perfekter schwarzer Körper verhält. Die bolometrische Helligkeit des Sterns variiert von 3,46 bis 4,08. Aus Dopplermessungen wissen wir, dass sich während der Pulsation die Sternoberfläche mit einer durchschnittlichen radialen Geschwindigkeit von 12,8 km/s ausdehnt oder zusammenzieht. Über den Pulsationszeitraum variiert der Gipfel der thermischen Strahlung (intrinsisch) des Sterns von 531,0 nm bis 649,1 nm.

- (a) Finden Sie das Verhältnis  $R_1/R_2$ . (4P)
- (b) Finden Sie die Werte für  $R_1$  und  $R_2$ . (2P)
- (c) Finden Sie den Leistungsfluss  $F_2$  des Sterns bei maximaler Ausdehnung. (2P)

## 6 Kosmisch kleine Energien (6P)

Das Five-hundred-meter Aperture Spherical Radio Telescope (FAST) ist ein einzelnes Radioteleskop in China. Der physische Durchmesser der Schüssel beträgt 500 m, jedoch beträgt der effektive Durchmesser der Sammelfläche während der Beobachtungen 300 m. Betrachten Sie Beobachtungen der thermischen Radioemission der Photosphäre der Sonne bei 3,0 GHz mit diesem Teleskop und einem Empfänger mit einer Bandbreite von 0,3 GHz.

- (a) Berechnen Sie die gesamte Energie ( $E_{\odot}$ ), die der Empfänger während einer Stunde Beobachtung im vorgesehenen Radiobereich sammeln wird. Sie können annehmen, dass der 0,3 GHz Bereich ausreichend klein ist, sodass Sie in ihm Frequenzabhängigkeiten vernachlässigen können. (4,5P)
- (b) Schätzen Sie die Energie, die benötigt wird, um ihr Antwortblatt umzublättern ( $E'$ ). Welche der beiden Energien ist größer? Hinweis: Die typische Flächenmassendichte von Papier beträgt 80 g/m<sup>2</sup>. (1,5P)

## 7 Spektralklassen und Massen (9P)

Ein guter Ausgangspunkt für die Suche nach Leben ist auf Planeten, die Hauptreihensterne umkreisen. Besonders interessant sind Planeten, die einen erdähnlichen Temperaturbereich und geringe Temperaturschwankungen aufweisen. Nehmen Sie an, dass für einen Hauptreihenstern die Beziehung zwischen der Leuchtkraft  $L$  und der Masse  $M$

$$L \propto M^{3.5}$$

gegeben ist. Sie können davon ausgehen, dass die insgesamt freigesetzte Energie  $E$  über die Lebensdauer des Sterns proportional zur Masse  $M$  des Sterns ist. Für die Sonne beträgt die Lebensdauer in der Hauptreihe etwa 10 Milliarden Jahre. Im Folgenden finden Sie Information zwischen der Spektralklasse und oberen Masse von Sternen in dieser Klasse:

Spektralklasse	O	B	A	F	G	K	M
Masse $M_{\odot}$	60	17.5	2.9	1.6	1.05	0.79	0.51

- Wenn es mindestens  $4 \cdot 10^9$  Jahre dauert, bis sich eine intelligente Lebensform entwickeln kann, bis zu Hauptreihensternen welcher Spektralklasse sollten Astronomen nach intelligentem Leben suchen? (2P)
- Nehmen Sie an, dass der Zielplanet dieselbe Emissivität  $\varepsilon$  und Albedo  $a$  wie die Erde hat. Um dieselbe Temperatur wie die Erde zu haben, drücken Sie die Entfernung  $d$ , in astronomischen Einheiten (AU), des Planeten zu seinem Hauptreihenstern, von Masse  $M$ , aus. (3P)
- Die Existenz eines Planeten um einen Stern kann durch die Variation der Radialgeschwindigkeit des Sterns um den Schwerpunkt des Stern-Planetensystems gezeigt werden. Wenn die kleinste durch den Beobachter detektierbare Dopplerverschiebung in der Wellenlänge

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-10}$$

beträgt, berechnen Sie die geringste Masse eines solchen Planeten, der im in b) berechneten Abstand  $d$  um einen Hauptreihenstern mit der in a) berechneten Masse  $M$  kreist. Geben Sie seine Masse in Erdmassen an. (4P)

## 8 Mondbeobachtung (13P)

Ein Fotograf nimmt zum Sonnenuntergang bei der Wintersonnenwende (21. Dezember) das in Abbildung 1 gezeigte Foto auf. Nehmen Sie im folgenden an, dass die Bahnebene des Mondes nicht zur Ekliptikebene geneigt ist, der Mond sich also in der Ekliptik befindet und die Erdumlaufbahn kreisförmig ist.

- Begründen Sie, in welcher Hemisphäre (nördlich oder südlich) das Foto aufgenommen wurde. (1P)

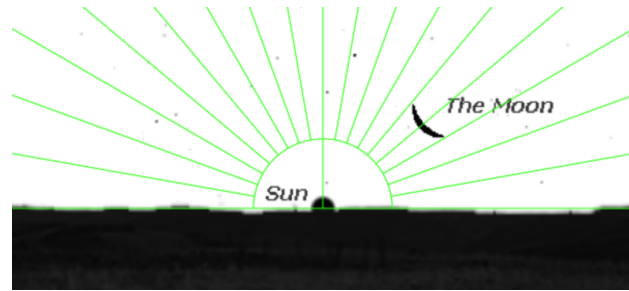


Abbildung 1: Das Bild des Fotografen. Die Grünen Linien sind jeweils in  $10^\circ$  Schritten.

- (b) Finden Sie den Breitengrad  $\Phi$  des Fotografen. (7P) **Hinweis:** Zur Wintersonnenwende beträgt die Deklination der Sonne  $\delta = -23.5^\circ$ . Damit befinden sich Sonne, Ekliptikpol sowie Himmelsnord/südpol entlang einer Linie auf einem Großkreis. Ein möglicher Lösungsweg beginnt mit der Konstruktion einer Skizze der Himmelskugel mit Ekliptikpol, Nord/Südpol und Zenit, sowie Sonne und Mond.
- (c) Berechnen Sie die lokale Uhrzeit zur Zeit des Fotos. Nehmen Sie hierfür an, dass der Fotograf sich beim Längengrad  $67^\circ$  W in der Zeitzone UTC-03 befindet und die Zeitgleichung  $0min$  beträgt. (Falls Sie bei (b) kein Ergebnis für  $\Phi$  hatten, nehmen Sie  $\Phi = 45^\circ S$  an.) (3P)
- (d) Finden Sie die lokale Sternzeit zur Zeit des Fotos. (2P)

## 9 Umlaufgeschwindigkeit (8P)

Bei der krummlinigen Bewegung eines Planeten um einen Stern ändert sich die Richtung des Geschwindigkeitsvektors kontinuierlich. Dies kann durch eine sogenannte „Bahnkurve im Geschwindigkeitsraum“ dargestellt werden und wird wie folgt erhalten: Für jeden Punkt auf der räumlichen Bahn wird der entsprechende Geschwindigkeitsvektor so gezeichnet, dass sein Ausgangspunkt im Ursprung des Geschwindigkeitsraums liegt und seine Größe und Richtung gleich dem Geschwindigkeitsvektor an diesem Punkt im Realraum entsprechen. Die Spitze dieses variablen Geschwindigkeitsvektors erzeugt eine Kurve im Geschwindigkeitsraum. (Die Bezeichnung 'Hodograph' wurde dieser Kurve 1846 von Hamilton gegeben.)

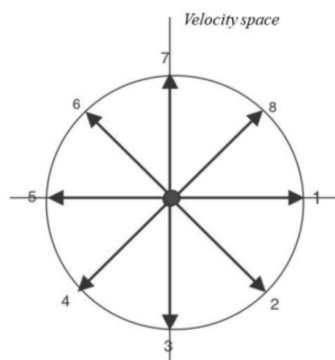


Abbildung 2: Hodograph einer kreisförmigen Umlaufbahn

Als Beispiel siehe Abbildung 2. Bei einer kreisförmigen Umlaufbahn ist die Größe der Geschwindigkeit konstant und daher ist der Hodograph (Abbildung 1) des Geschwindigkeitsvektors für die Keplersche Kreisbewegung ebenfalls ein Kreis, dessen Zentrum sich im Ursprung des Geschwindigkeitsraumes befindet. Der Radius dieses Kreises entspricht der konstanten Größe der Kreisgeschwindigkeit.

- (a) Schreiben Sie einen Ausdruck für den Radius des Hodographen in Abb. 2, als Funktion der Masse  $M$  des Sterns und des Radius  $r$  der kreisförmigen Umlaufbahn der Planetenbewegung. (1P)
- (b) Für einen Planeten mit Geschwindigkeit  $v$  in einem allgemeinen Keplerorbit, schreiben Sie den Beschleunigungsvektor  $\vec{a}$  und den Betrag des Drehimpulses  $L$  auf. Benutzen Sie diese beiden Größen, um zu zeigen, dass

$$\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = k \frac{d\varphi}{dt} \quad (1)$$

gilt und bestimmen Sie die Konstante  $k$  als Funktion der Masse  $M$  des Sterns, der Masse  $m$  des Planeten und des Drehimpulses  $L$ . (4P)

Anhand Gleichung 1 lässt sich beweisen (sie müssen dies nicht tun), dass der Hodograph immer ein Kreis ist, doch außer im kreisförmigen Orbit liegen der Ursprung des Geschwindigkeitsraums und der Mittelpunkt des Hodographen nicht im selben Punkt.

- (c) Bestimmen Sie die Konstante  $k$  spezifisch für eine Kreisbahn als Funktion von der Masse des Sterns  $M$  und dem Radius der Kreisbahn  $r$ . (1P)
- (d) Mit dem Wissen, dass der Hodograph kreisförmig ist, finden Sie den Radius des Hodographen in Abhängigkeit der Geschwindigkeiten am nächsten  $v_p$  und fernsten Punkt  $v_a$  (Sie müssen  $v_p$  und  $v_a$  nicht ausrechnen, nehmen Sie sie als gegeben an). Machen Sie auch eine qualitative Skizze des Hodographen mit den beiden Geschwindigkeitsvektoren  $v_p$  und  $v_a$ . (2P)

## 10 Kosmische Strings (22P)

Gemäß unserem aktuellen Verständnis kurz nach dem Urknall, als das Universum extrem heiß war, waren die elektromagnetische Kraft, die starke Kernkraft sowie die schwache Kernkraft als eine (GUT-Kraft) "Grand Unified Theory-Kraft" vereinigt. Als das Universum abkühlte, trennte sich zunächst die starke Kernkraft von der elektroschwachen Kraft, danach die schwache Kraft von der elektromagnetischen Kraft. Diese Übergänge fanden in schneller Folge innerhalb eines kleinen Bruchteils einer Sekunde nach dem Urknall statt. Es wird angenommen, dass diese Phasenübergänge eine Vielzahl von eigenartigen Objekten produzierten, die als Vakuumdefekte bezeichnet werden und die heute noch beobachtet werden könnten.

### Hinweise

- Sofern nicht anders angegeben, verwenden Sie die Gesetze der Newtonschen Mechanik.
- Beachten Sie, dass das Gravitationsfeld  $\vec{g}$  dem Gaußschen Theorem genügt:

$$\vec{g} \cdot \vec{A} = -4\pi G M_{\text{in}}$$

Diese Aufgabe hat zwei Teile. **A** befasst sich mit dem Gravitationsfeld eines Strings und **B** befasst sich mit dem Gravitationslinseneffekt von Strings. Die beiden Teile können separat bearbeitet werden.

### 10.1 Teil A (12P)

Die Fragen (c), (d) und (e) beziehen sich auf ein klassisch beschriebenes Teilchen mit Geschwindigkeit  $v$  im Abstand  $r > r_0$  vom String.

- Zunächst approximieren wir den kosmischen String als unendlich langen Zylinder mit Radius  $r_0$  und Längenmassendichte  $\mu$ . Bestimmen Sie das Gravitationsfeld des Strings  $\vec{g}(r)$  als Funktion von  $G, \mu$  und  $r_0$ . Betrachten Sie hierfür  $r_0 < r$  und  $r_0 > r$  separat. Bestimmen Sie auch  $g_0$ , also der Betrag der Beschleunigung bei  $r = r_0$ . Skizzieren Sie den Betrag der Feldstärke in Abhängigkeit von  $r$  qualitativ. (6P)
- Bei einem kreisförmigen Orbit um den String mit  $R > r_0$  lässt sich die folgende Beziehung zwischen dem Radius  $R$  des Orbits und der Periodendauer  $\tau$  herleiten:

$$R = A\tau^\alpha.$$

Bestimmen Sie die Konstanten  $A$  und  $\alpha$  in Abhängigkeit von  $G$  und  $\mu$ . (1,5P)

- Bestimme die potenzielle Energie  $U$  als Funktion von  $r$ . (2P)
- Bestimme anhand Energieerhaltung die maximale Distanz  $R_{max}$ , die das Teilchen erreichen kann. (1,5P)
- Kann das Teilchen dem Gravitationsfeld entfliehen? Begründen Sie Ihre Antwort. (1P)

### 10.2 Teil B (11P)

Berücksichtigt man die Energiedichte des Strings und behandelt das Problem in der allgemeinen Relativitätstheorie, dann wirkt der String als Gravitationslinse und wird dadurch auffindbar. Durch Lösung der einsteinschen Feldgleichungen erhält man eine kegelförmige, gekrümmte Raumzeit um den String, die in Abbildung 3 dargestellt ist.

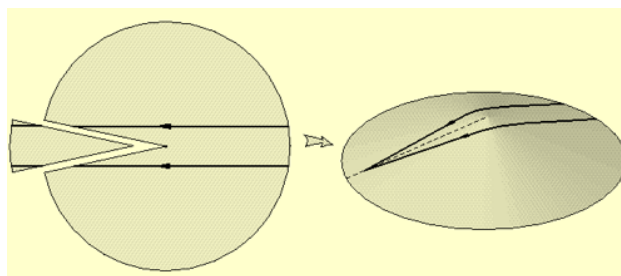


Abbildung 3: Krümmung von Lichtstrahlen durch den String (Kegeloberfläche)

Der Ablenkungswinkel eines Lichtstrahls, der von einer weit entfernten Punktlichtquelle  $O$  (wie einem Quasar) kommt und den String passiert, ist gegeben durch:

$$\delta\Phi = \frac{4\pi G\mu}{c^2}$$

wobei  $\mu$  die Längenmassendichte des Strings ist.  $\delta\Phi$  ist insbesondere unabhängig vom Parameter  $p$  (siehe Abb. 4). Machen sie ihre Berechnungen im folgenden, als würde das Licht wie bei einer dünnen Linse auf einmal um  $\delta\Phi$  in der „Linsenebene“ des Strings gebrochen werden. Der Abstand zwischen einem Beobachter auf der Erde  $E$  und dem String  $S$  ist  $D_{ES}$ , der Abstand zwischen dem Beobachter und der Lichtquelle  $O$  ist  $D_{OE}$ . Außerdem ist  $p \ll D_{ES}$  sowie  $p \ll D_{OE}$ . Somit gelten hier neben anderen Näherungen insbesondere auch Kleinwinkelnäherungen.

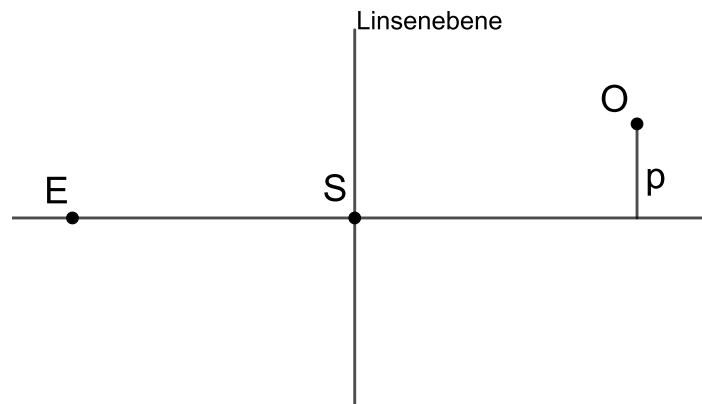


Abbildung 4: Skizze zur Behandlung der Lichtkrümmung

- (a) Obwohl der Ablenkungswinkel  $\delta\Phi$  nicht von  $p$  abhängt, wird ein Beobachter auf der Erde nur mehr als ein Bild des Objektes sehen können, falls  $p$  in einem bestimmten Bereich ist. Finden Sie eine Bedingung für den Wert von  $p$  in Abhängigkeit von den Abständen  $D_{ES}$ ,  $D_{OE}$  und  $\mu$  sodass der Beobachter in  $E$  mehr als ein Bild von  $O$  sehen kann. (4P)
- (b) Falls der Beobachter mehrere Bilder sehen kann, was ist die Winkeldistanz zwischen den einzelnen Paaren? Finde einen Ausdruck mit  $D_{ES}$ ,  $D_{OE}$  und  $\delta\phi$ . (5P)
- (c) Wenn  $D_{OE} = 2D_{ES}$  und  $\delta\Phi = 1 \cdot 10^{-5}$  rad, bestimme die minimale Größe eines optischen Teleskops ( $\lambda \approx 500$  nm), sodass die Bildteilung durch den Gravitationslinseneffekt noch gemessen werden kann. (2P)